9. RADICALES.

Propiedades de los radicales.

- $a \cdot \sqrt[n]{x} \begin{cases} n \to \text{índice} \\ x \to \text{radicando} \\ a \to \text{coeficiente} \end{cases}$

- $\sqrt[n]{x} = b \Leftrightarrow b^n = x$

- Radicales semejantes.– Los que tienen igual índice e igual radicando.

- $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

- Simplificación de radicales.– Si en $\sqrt[n]{x^m}$, m y n son divisibles por un mismo número, entonces se pueden dividir ambos y el radical obtenido es igual al primero.

Ej: $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$

- Obtención de radicales con un índice común.– Dados los radicales $\sqrt[n_1]{a_1}$, $\sqrt[n_2]{a_2}$, ..., $\sqrt[n_i]{a_i}$, se pueden obtener radicales iguales a cada uno de ellos en los que el índice sea el mínimo común múltiplo de los índices n_1, n_2, ..., n_i. Para ello, se eleva el radicando al resultado de dividir dicho mínimo común múltiplo entre el índice que tenía inicialmente cada raíz.

Ej: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3x^2}$ y $\sqrt[4]{x^3}$ se pueden poner con el mismo índice, que será el m.c.m. de 2, 3 y 4.

m.c.m.(2, 3, 4) = 12.

Entonces:

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6}, \quad \sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[12]{\left(3x^2\right)^4} = \sqrt[12]{3^4 x^8}, \quad \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{\left(x^3\right)^3} = \sqrt[12]{x^9}$$

- Extracción de factores.– Dado el radical $\sqrt[m]{x^n}$, si $n \geq m$ pueden extraerse factores. Para ello, se divide n entre m. Si se obtiene p de cociente y q de resto, entonces:

$$\sqrt[m]{x^n} = x^p \cdot \sqrt[m]{x^q}$$

- Introducción de factores.– Los coeficientes se pueden introducir dentro de la raíz multiplicando su exponente por el índice de la raíz.

Ej: $3x^2 \cdot \sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[3]{2x^2 \cdot 3^3 x^6} = \sqrt[3]{54x^8}$

- Suma y resta de radicales.– Sólo se pueden sumar o restar los radicales que sean semejantes. Se efectúa sumando o restando los coeficientes y dejando igual el índice y el radicando.

Ej: $\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{2} = -2\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$

- Producto y división de radicales.– Primero, se les pone a todos los radicales el mismo índice. Después, se emplean las siguientes propiedades:

$\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[m]{y}=\sqrt[m]{x\cdot y}$ $\qquad$ $\dfrac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}=\sqrt[m]{\dfrac{x}{y}}$

- Potencia de una raíz: $\left(\sqrt[m]{x}\right)^n=\sqrt[m]{x^n}$

- Raíz de una raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x}$

- Racionalización de fracciones.– Dada una fracción con radicales en su denominador, *racionarla* consiste en obtener una fracción equivalente a ella que no tenga radicales en el denominador.

a) Fracciones del tipo $\dfrac{N}{a\cdot\sqrt[m]{x^n}}$.– Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[m]{x^{m-n}}$.

b) Fracciones del tipo $\dfrac{N}{b+a\cdot\sqrt{x}}$, donde b puede ser un número, un polinomio u otra raíz cuadrada.– Se multiplica numerador y denominador por el *conjugado* del denominador, que es $b-a\cdot\sqrt{x}$.

1. Expresa como radicales las siguientes potencias en las que aparecen exponentes fraccionarios. Expresa los resultados sin que aparezcan exponentes negativos.

Ej: $2^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{2^2}$

a) $3^{-\frac{1}{3}}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

c) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$

e) $\left[\left(\dfrac{5}{12}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{6}{5}}$

f) $\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{\frac{5}{4}}$

g) $\left[\left(\dfrac{1}{2^{-2}}\right)^{-\frac{1}{5}}\right]^{\frac{2}{3}}$

2. Efectúa las siguientes operaciones con potencias. Expresa los resultados como producto o división de potencias o radicales de números primos, sin que aparezcan exponentes negativos ni fraccionarios.

Ej: $8^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{3}{2}}:2^2=2^2$

a) $3^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{9}$.

b) $2^{-\frac{1}{5}}\cdot(4)^{\frac{1}{3}}:\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}$

c) $98^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(\dfrac{1}{14}\right)^{-\frac{1170}{780}}:28^{\frac{1}{3}}$

d) $$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(0'\widehat{6}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(0'\widehat{3}\right)^{-1}}$$

3. Extrae fuera de cada radical los factores que puedas.

Ej: $\sqrt[3]{256} = 4 \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[3]{24a^3b^6c^5d}$

b) $\sqrt[3]{27x^6y}$

c) $\sqrt[4]{16 \cdot 27 \cdot 2401 \cdot 25}$

d) $\sqrt{\dfrac{36x^8}{625y^{11}}}$

4. Introduce dentro de cada radical los factores que estén fuera. Expresa el radicando como productos o divisiones de potencias de números primos, sin que aparezcan exponentes negativos.

Ej: $2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2^3 \cdot 3^4}$

a) $1200 \cdot \sqrt[5]{300}$

b) $3x^2y \cdot \sqrt{x \cdot z}$

c) $6 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{8}{45}}$

5. Efectúa las siguientes sumas y restas de radicales:

Ej: $5\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

a) $5\sqrt{3} + \sqrt{27} - 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{6} + \sqrt{600} - \sqrt{54} + \sqrt{96}$

c) $9\sqrt{48} - \sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}$

d) $\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x^2} \cdot y - \sqrt{80x^3}$

e) $\sqrt{\dfrac{8}{5}} - \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{45}} + 2 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{245}}$

f) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{4}{27}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}} - 2 \cdot \sqrt{\dfrac{6}{72}}$

6. Simplifica los siguientes radicales:

Ej: $\sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$

a) $\sqrt[6]{216}$

b) $\sqrt[10]{x^2 \cdot y^4 \cdot \left(z^2 \cdot t^3\right)^2}$

c) $\sqrt[24]{729000}$

7. Efectúa las siguientes operaciones. En el resultado final, extrae fuera de los radicales los factores que puedas.

Ej: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10} = 2\cdot\sqrt{5}$

a) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt[5]{200}$

d) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{6}$

e) $\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[10]{2}$

f) $4\cdot\sqrt{72}:\sqrt{8}$

g) $\sqrt[4]{4}:\sqrt[12]{64}$

h) $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

i) $\left(5+3\sqrt{6}\right)\cdot\left(7-6\cdot\sqrt{6}\right)$

j) $\left(2\cdot\sqrt{18}-3\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{18}-1\right)$

k) $\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

l) $\left(4\cdot\sqrt[8]{3\cdot x^2\cdot y}\right)^2$

m) $\left(\sqrt[3]{108}\right)^2$

n) $\left(5\cdot\sqrt[3]{x-y}\right)^2$

o) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2$

p) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

q) $\sqrt{\sqrt[7]{x^6y^4z^8}}$

r) $\sqrt{2\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{24}}}$

8. Racionaliza las siguientes expresiones. Expresa el resultado lo más simplificado posible, y sin que aparezcan exponentes fraccionarios ni negativos.

Ej: $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{5}$

a) $\dfrac{5}{3\cdot\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{45}}$

d) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{6\cdot\sqrt{10}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$

i) $\dfrac{7\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$

j) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

k) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

l) $\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$

m) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

9. Realiza las siguientes operaciones. Expresa los resultados racionalizados y lo más simplificados posible, y sin que aparezcan en ellos exponentes negativos ni fraccionarios.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-2}{5+2\cdot\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{1+2\cdot\sqrt{5}}{1-2\cdot\sqrt{5}}+\dfrac{1-2\cdot\sqrt{5}}{1+2\cdot\sqrt{5}}$